12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

План:

1. Начальные условия

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

3. Линейно независимые и линейно зависимые функции. Определитель Вронского

4. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

5. Решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Ключевые слова и словосочетания

Дифференциальное уравнение второго порядка, дифференциальное уравнение второго порядка разрешенный относительно производной второго порядка, начальные условия, задача Коши, линейное уравнение второго порядка, линейное однородное уравнение второго порядка, линейное неоднородное уравнение второго порядка, линейно независимые и линейно зависимые функцию, определитель Вронского, фундаментальная система решений, вариация произвольных постоянных

1. Начальные условия

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция. К уравнениям второго порядка приводят, в частности, различные задачи механики. Пусть, например, материальная точка с массой m движется вдоль оси Ox, причем сила, действующая на точку, задана как функция времени: $F=F(t)$. Закон движения выражается с помощью функции $x=x(t)$, задающей положение точки на оси в произвольной момент времени t. Согласно второму закону Ньютона, имеем $ma=F$, где $\boldsymbol{a}$ – ускорение точки, т.е. $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Таким образом, функция $x(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(t). \tag{2}$$

В более общем случае сила F может зависеть не только от момента времени t, но и от положения точки в момент t (таковы, например, сила тяготения или сила упругости), а также от ее скорости. Тогда $F = F\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right)$, и вместо уравнения (2) имеем уравнение более общего вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{3}$$

Для дифференциального уравнения важное значение имеет вопрос о дополнительных условиях, позволяющих получить какое-то одно определенное решение уравнения. Какой характер могут носить эти условия для уравнения (3)? Возможный ответ на этот вопрос подсказывает рассмотренная выше механическая модель. Интуитивно ясно, что если задано положение точки в некоторый момент времени t_0, а также ее скорость в момент t_0, то дальнейшее движение точки однозначно определяется этими условиями. Поэтому имеются основания выбрать дополнительные условия в виде

$$x\big|_{t=t_0} = x_0, \ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = x_0',$$

где t_0, x_0, x_0' - заданные числа. Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая уравнения (3), проходящая через заданную точку $(t_0;\ x_0)$ и имеющая в этой точке заданное направление, которое характеризуется угловым коэффициентом x_0' (рис. 1). Поставленная таким образом задача называется **задачей Коши** для уравнения (1).

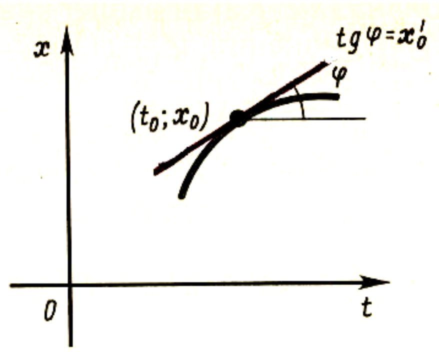

Рис. 1

В дальнейшем независимую переменную будем, как и ранее, обозначать через x, а неизвестную функцию – через y; таким образом, мы возвращаемся к записи уравнения второго порядка в форме (1) (а не в форме (3)).

Обычно уравнение (1) удается разрешить относительно y'', т.е. привести его к виду

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (4)$$

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (4).

Теорема 1. Если в некоторой окрестности значений x_0, y_0, y_0' функция $f(x, y, y'$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$, то существует такая окрестность точки $(x_0; y_0; y_0')$ (в пространстве R^3), в которой задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ имеет решение, и притом единственное.

Доказательство опускаем.■

Как уже отмечалось в § 30, (п.1.2) общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, т.е. имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Это вполне согласуется с существованием и единственностью решения задачи Коши: из равенств $\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_1, C_2) = y_0'$ вообще говоря, однозначно определяются значения C_1 и C_2, а значит, и частное решение уравнения (1).

Например, общее решение уравнения $y''=0$ имеет вид $y=C_1x+C_2$. Таким образом, интегральные кривые представляют собой прямые на плоскости. Через данную точку $(x_0; y_0)$ плоскости в данном направлении, характеризуемом угловым коэффициентом y_0' проходит интегральная кривая, и притом единственная.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение $y''+y=0$. Нетрудно проверить, что оно имеет частные решения $y_1(x)=\cos x$ и $y_2(x)=\sin x$. Функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cos x+C_2\sin x$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является решением, поскольку

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+(C_1y_1+C_2y_2)=$$
$$=C_1(y_1''+y_1)+C_2(y_2''+y_2)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0.$$

Это решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Каковы бы ни были числа x_0, y_0, y_0' (начальные условия задачи Коши), существует единственная функция вида $C_1\cos x+C_2\sin x,$ удовлетворяющая условиям $y\big|_{x=x_0}=y_0$ и $y'\big|_{x=x_0}=y_0'.$ Например, если $x_0=0,$ $y_0=1,$ $y_0'=1,$ то для нахождения C_1 и C_2 имеем условия

$$y\big|_{x=x_0}=C_1\cos 0+C_2\sin 0=1,\quad y'\big|_{x=x_0}=-C_1\sin 0+C_2\cos 0=1,$$

из которых следует $C_1=1,$ $C_2=1,$ т.е. $y=\cos x+\sin x.$

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка называется **линейным,** если оно имеет вид

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = \delta(x),$$

где левая часть линейна по отношению к $y, \quad y', \quad y''$.

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0$, и разделив обе части уравнения на $\alpha(x)$, придем к уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{5}$$

Будем считать функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывными; согласно теореме 1 это обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (5).

При рассмотрении уравнения (5) важную роль играет уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6}$$

которое называется **линейным однородным уравнением,** соответствующим уравнению (5).

Множество решений уравнения (6) обладает рядом особенностей, которые делают оправданным специальное изучение этого уравнения. Такое изучение будет проведено в п.3 и п. 4.

3. Линейно независимые и линейно зависимые функции. Определитель Вронского

Пусть $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ – какие-то функции. Рассмотрим выражение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_k y_k(x),$$

где $C_1, C_2, ..., C_k$ – постоянные числа. Любая функция $\boldsymbol{y(x)}$ такого вида называется **линейной комбинацией** функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$.

Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называется **линейно независимыми,** если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных. В противном случае, т.е. если какая-то из данных функций может быть представлена как линейная комбинация остальных, эти функции называются **линейно зависимыми.**

Какими способами можно установить линейную независимость нескольких функций? Один из способов связан с так называемым **определителем Вронского.** Для системы, состоящей из двух функций $y_1(x), y_2(x)$, определитель Вронского имеет вид

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

для системы из трех функций $\boldsymbol{y_1(x), y_2(x), y_3(x)}$ – вид

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}$$

и т.д. Отметим, что как сами функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ так и их определитель Вронского являются функциями от $\boldsymbol{x}$.

Теорема 2. Если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно (т.е. при всех $\boldsymbol{x}$) равен нулю.

Доказательство. Для сокращения записи положим $k = 3$. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ линейно зависимы; например, пусть $y_3(x)$ есть линейная комбинация $y_1(x)$ и $y_2(x)$; $y_3 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$. Тогда имеем

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ y_1' & y_2' & C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) \\ y_1'' & y_2'' & C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) \end{vmatrix},$$

но такой определитель равен нулю, поскольку его третий столбец является линейной комбинацией первого и второго столбцов. ■

Следствие. Если $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \neq 0$ (хотя бы при одном значении x), то функции $y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x)$. **линейно независимы.**

Заметим, что обратное утверждение, а именно:
если $y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)$ линейно независимы, то $W(y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)) \neq 0$ вообще говоря, неверно.

4. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

Займемся теперь подробно изучением однородного линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (7)$$

Теорема 3. Линейная комбинация нескольких решений уравнения (7) также является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть каждая из функций $y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)$ является решением уравнения (7). Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию этих функций:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x).$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$y' = C_1 y_1 + ... + C_k y_k', \quad y'' = C_1 y_1'' + ... + C_k y_k''.$$

Отсюда получим

$$y'' + p(x)y' + q(x) =$$

$$= (C_1 y_1'' + \cdots + C_k y_k'') + p(x)(C_1 y_1' + \cdots + C_k y_k') + q(x)(C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k) =$$

$$= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \cdots + C_k(y_k'' + p(x)y_k' + q(x)y_k) =$$

$$= C_1 \cdot 0 + ... + C_k \cdot 0 = 0,$$

т. е. функция $y(x)$ также является решением уравнения (7). ■

Теорема 4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (7), то их определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ ни при одном значении x не обращается в нуль.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что в некоторой точке $\boldsymbol{x}_0$ справедливо равенство $W=0$. Найдем такие два числа C_1 и C_2, не равные одновременно нулю, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0)+C_2 y_2(x_0)=0, \\ &C_1 y_1'(x_0)+C_2 y_2'(x_0)=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Искомые числа C_1 и C_2 обязательно существуют, так как определитель системы (8), имеющий вид

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

есть определитель Вронского $W(y_1,y_2)$ в точке x_0 и, следовательно, равен нулю. Далее, рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x),$$

которая к силу теоремы 3 является решением уравнения (7). Имеем $\varphi(x)\neq 0$: в противном случае тождественно по x выполнялось бы равенство $C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)=0,$ что означало бы линейную зависимость функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (здесь существенно используется тот факт, что C_1 и C_2 не равны одновременно нулю). Равенства (8) означают, что $\varphi(x_0)=0,$ $\varphi'(x_0)=0.$ Однако тем же начальным условиям удовлетворяет и другое решение уравнения (7), а именно, функция $y(x)$, тождественно равная нулю. Это противоречит единственности решения задачи Коши для уравнения (7). Таким образом, $W(y_1,y_2)\neq 0$ для всех x. ■

Из теорем 2 и 4 вытекает, что для любой пары решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) имеются только две возможности:

$y_1(x),$ $y_2(x)$ линейно зависимы, тогда (по теореме 2) $W(y_1,y_2)=0$ при любом значении x;

$y_1(x),$ $y_2(x)$ линейно независимы, тогда (по теореме 4) $W(y_1,y_2)\neq 0$ при любом значении x.

Мы располагаем теперь всем необходимым для доказательства следующей теоремы, занимающей центральное место в теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 5 ***(о структуре множества всех решений однородного уравнения)***. Если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) линейно независимы, то любое решение уравнения можно представить в виде их линейной комбинации.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)-$ произвольное решение уравнения (7). Выберем некоторое значение x_0 и обозначим числа $\varphi(x_0)$ и $\varphi'(x_0)$ соответственно через y_0 и y_0'. Если мы докажем, что существует решение вида $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (7) отсюда будет следовать $\varphi(x) = y(x)$ т.е. что заданное решение $\varphi(x)$ есть линейная комбинация решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Для нахождения искомых чисел C_1 и C_2 имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{aligned} \tag{9}$$

Эта система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными C_1, C_2. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

т.е. совпадает с определителем Вронского для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке x_0. Ввиду линейной независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этот определитель отличен от нуля. Следовательно, решение C_1, C_2 системы (9) существует. ■

Набор из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Согласно предыдущему, для фундаментальности системы $y_1(x), y_2(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия $W(y_1, y_2) \neq 0$. Используя данное определение, теорему 5 можно сформулировать по-другому. Ее новая формулировка выглядит так:

если $y_1(x), y_2(x)$ – какая-либо фундаментальная система решений однородного уравнения (7), то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Для уравнения $y'' - y = 0$ функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются частными решениями. Эти решения линейно независимы (образуют фундаментальную систему), так как их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Для уравнения $y'' + y = 0$ очевидными частными решениями являются функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$. Их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Общее решение есть

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - y' + \frac{1}{x} y = 0.$

Решение

В данном случае одним из решений является функция $y_1 = x$. Будем искать второе частное решение с помощью подстановки $y = y_1 u$, где u – новая неизвестная функция (можно показать, что такой способ нахождения второго решения применим к любому линейному уравнению). Имеем

$$y' = u + xu', \qquad y'' = 2u' + xu'';$$

уравнение принимает вид

$$2u' + xu'' - u - xu' + u = 0, \text{ или } \ xu'' + (2 - x)u' = 0.$$

Так как в полученное уравнение входит не сама неизвестная функции $\boldsymbol{u}$, а лишь ее производные, то можно понизить порядок уравнения с помощью подстановки $v = u'$. Получим

$$xv' + (2 - x)v = 0, \ \text{ или } \ \frac{dv}{v} = \frac{x-2}{2}dx,$$

откуда $v = \dfrac{e^x}{x^2}$. Следовательно, $u = \int v dx = \int \dfrac{e^x}{x^2} dx$, и искомое решение

$y_2(x) = x\int \dfrac{e^x}{x^2} dx$. Линейная независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$ очевидна. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \int \frac{e^x}{x^2} dx$$

(написанный справа интервал не выражается в элементарных функциях). ▲

5. Решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{10}$$

Соответствующее ему однородное уравнение (7) было подробно изучено в предыдущем пункте.

Пусть нам известна какая-то фундаментальная система частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения, как мы знаем, имеет вид $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Для отыскания же общего решения уравнения (10) теперь достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6. Общее решение неоднородного уравнения (10) есть сумма частного решения $y_*(x)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (7).

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы из § 30 (п.п. 3.1). ■

Итак, требуется найти частное решение уравнения (10). Будем искать такое решение в виде

$$y_* = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

т.е. в виде линейной комбинации функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, но не с постоянными коэффициентами C_1 и C_2, а с переменными коэффициентами $u_1(x)$ и $u_2(x)$ (отсюда и название «метод вариации постоянных»). Так как одно уравнение связывает две неизвестные функции (u_1 и u_2), то имеется возможность по ходу решения наложить на функции u_1 и u_2 еще одно ограничение, чем мы вскоре и воспользуемся. Дифференцируя равенство $y_* = u_1y_1 + u_2y_2$, находим

$$y_*' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2.$$

Используем теперь возможность, о которой говорилось выше: введем ограничение на выбор неизвестных функций u_1 и u_2. В качестве такого ограничения примем условие

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

Тогда получим

$$y_*' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Дифференцируя еще раз, имеем

$$y_*'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'.$$

Подставляя теперь выражения для $y,\ y', y''$ в уравнение (10), после очевидных преобразований получим

$$u_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Оба выражения, заключенные в скобки, равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения. Следовательно, приходим к соотношению

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Итак, неизвестные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x). \end{aligned} \qquad (11)$$

Пользуясь тем, что определитель из коэффициентов при $u_1(x)$ и $u_2(x)$, равный

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

есть определитель Вронского для функций $y_1(x), y_2(x)$ и потому отличен от нуля (по условию $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения), находим из соотношений (11) функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Затем простым интегрированием находим сами функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, а вслед за ними и искомое решение $y_* = u_1y_1 + u_2y_2$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 1 \quad (x > 0),$$

используя тот факт, что однородное уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ имеет линейно независимые частные решения $y_1(x) = 1, \;\; y_2(x) = x^2$.

Решение

Представим искомое решение y в виде $y = u_1 \cdot 1 + u_2x^2$. Для нахождения u_1 и u_2 имеем систему уравнений (11), которая в данном случае принимает вид

$$u_1' + u_2' x^2 = 0,$$
$$u_2' \cdot 2x = 1.$$

Отсюда $u_2' = \dfrac{1}{2x}$, $u_1' = -\dfrac{1}{2}x$; следовательно,

$$u_2 = \frac{1}{2}\ln x, \quad u_1 = -\frac{1}{4}x^2.$$

Искомое решение имеет вид $y_*(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$. ▲

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

6.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка требует знания какой-нибудь фундаментальной системы частных решений. Если коэффициенты уравнения не постоянны, т. е. действительно
зависят от x, то нахождение такой системы представляет, вообще говоря, трудную задачу. Значительно проще обстоит дело в случае уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12}$$

где p и q - постоянные. Для этого случая можно указать простой способпостроения фундаментальной системы решений.

Будем искать частное решение уравнения (12) в виде показательной функции $y = e^{\lambda x}$. Дифференцируя дважды функцию y, получим $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Подставляя выражения для функции y и ее производных в уравнение (12), приходим к соотношению

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то полученное соотношение равносильно уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (13)$$

Алгебраическое уравнение (13) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (12).

Дальнейшая схема построения фундаментальной системы решений для уравнения (12) такова. Алгебраическое уравнение (13) имеет два корня - действительных или комплексных. Обозначим их λ_1 и λ_2. Таким образом, каждая из функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ является решением уравнения (12). Если эти

функции линейно независимы, то общее решение уравнения, согласно теореме 5 , имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. В случае линейной зависимости указанных функций необходимы дополнительные рассуждения. Более подробно этот вопрос будет обсужден в следующем подпункте.

6.2. Построение общего решения. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться при решении характеристического уравнения (13).

Первый случай: корни λ_1 и λ_2 - действительные и различные. Соответствующие им решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно независимы. Действительно, их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

ввиду $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отличен от нуля. Следовательно, y_1 и y_2 образуют фундаментальую систему решений.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, имеем линейно независимые частные решения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$. Общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \blacktriangle$$

Второй случай: корни λ_1 и λ_2 - комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, где $\beta \neq 0$. Соответствующие им комплексные решения обозначим z_1 и z_2:

$$z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \qquad z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Они линейно независимы, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Используя формулу Эйлера, можем записать

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

откуда видно, что при любом x функции z_1 и z_2 сопряжены. Составим линейные комбинации

$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Функции y_1 и y_2 являются действительными решениями уравнения (12). Эти решения также линейно независимы: в противном случае мы имели бы тождественное равенство $y_1 = Cy_2$ и (или $y_2 = Cy_1$), откуда следовала бы линейная зависимость между z_1 и z_2 . Итак, комплексно сопряженным корням $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ характеристического уравнения можно сопоставить два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$. Таким образом, имеем частные решения $y_1 = e^{2x}\cos x$, $y_2 = e^{2x}\sin x$. Общее решение записывается в виде

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x). \blacktriangle$$

Третый случай: корни λ_1 и λ_2 - равные, а значит, действительные. Будем рассуждать следующим образом (хотя это рассуждение и не имеет силы доказательства). Изменим незначительно коэффициенты p и q уравнения так, чтобы вместо двух равных корней λ_1 и λ_2 получились два неравных (но близких) корня λ_1^* и λ_2^*. Соответствующие решения $y_1 = e^{\lambda_1^* x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2^* x}$ являются различными. Составим из них линейную комбинацию

$$\frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^\bullet}. \tag{14}$$

Если теперь представить, что коэффициенты уравнения (12) возвращаются к своим прежним значениям, т. е. $\lambda_1^* \to \lambda_1$, $\lambda_2^* \to \lambda_2$, то из (14) в пределе получим решение

$$y(x) = \lim_{\substack{\lambda_1^\bullet \to \lambda_1 \\ \lambda_2^* \to \lambda_1}} \frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^\bullet} \tag{15}$$

исходного дифференциального уравнения (12). Для нахождения правой части соотношения (15) воспользуемся тем, что по теореме Лагранжа для любых a и b имеет место равенство $e^a - e^b = (a-b)e^{\xi}$, где точка ξ находится между a и b. В частности, $e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x} = (\lambda_2^* - \lambda_1^*)e^{\lambda x}$, где λ находится между λ_1^* и λ_2^*. Поэтому правая часть соотношения (15) равна $xe^{\lambda_1 x}$. Таким образом, кроме решения $e^{\lambda_1 x}$, имеем решение $xe^{\lambda_1 x}$.

Итак, равным корням $\lambda_1 = \lambda_2$ характеристического уравнения можно сопоставить два частных решения $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$. Они линейно независимы (проверить это самостоятельно); следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y == e^x(C_1 + C_2 x).$$

6.3. Неоднородное уравнение

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{16}$$

где $f(x)$ - некоторая заданная функция; коэффициенты p и q по-прежнему считаем постоянными. Согласно теореме 6, для построения общего решения уравнения (16) достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения, а также общее решение соответствующего однородного уравнения. Поскольку второе мы уже умеем делать, задача сводится к нахождению частного решения уравнения (16).

Для решения этой задачи можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Однако во многих важных для практики случаях имеется и более простой способ. Он применим в случае, когда $f(x)$ есть функция вида $P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$ - многочлен. Укажем суть этого способа, не вникая в его обоснование.

Первый случай: число α не является корнем характеристического уравнения. Тогда решение нужно искать в виде

$$y = Q(x)e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$. Записав $Q(x)$ в виде многочлена с неопределенными коэффициентами и подставив выражение для у в уравнение (16), после сокращения обеих частей на $e^{\alpha x}$ получаем равенство двух многочленов (из которых один есть $P(x)$). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений, из которой найдем коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Особо отметим два частных случая:

1) $f(x) = P(x)$, т.е. правая часть уравнения (16) представляет собой многочлен от x. В этом случае имеем $\alpha = 0$; следовательно, если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y = Q(x)$;

2) $f(x)=e^{\alpha x}$. Тогда $P(x)=1$ есть многочлен нулевой степени, а значит, $Q(x)=c=const$. Если при этом число α не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y=ce^{\alpha x}$.

Пример 8. Найти частное решение уравнения

$$y''-5y'+6y=(12x-55)e^{-x}.$$

Решение

В данном случае $\alpha=-1$. Корнями характеристического уравнения являются 2 и 3; число α не совпадает ни с одним из них. Поэтому решение ищем в виде $y=(ax+b)e^{-x}$. Дифференцируя выражение для y, находим

$$y'=\alpha e^{-x}-(ax+b)e^{-x}=(-ax+a-b)e^{-x},$$

$$y''=-\alpha e^{-x}-(-ax+a-b)e^{-x}=(-ax-2a+b)e^{-x}.$$

Подставляя $y,\ y',\ y''$ в уравнение и сокращая обе части на e^{-x}, приходим к тождественному равенству

$$(ax-2a+b)-5(-ax+a-b)+6(ax+b)=12x-55,$$

или

$$12ax-7a+12b=12x-55,$$

откуда

$$\begin{cases}12a=12,\\ -7a+12b=-55.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=1,\ b=-4$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y=(x-4)e^{-x}$. ▲

Второй случай: один из корней характеристического уравнения равен α, а второй корень отличен от α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y=xQ(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 9. Найти частное решение уравнения

$$y''-2y'-3y=(8x+10)e^{3x}.$$

Решение

Здесь $\alpha = 3$. Корнями характеристического уравнения являются - 1 и 3, один из них совпадает с $\alpha = 3$. Поэтому решение ищем в виде $y = x(ax + b)e^{3x}$.

Подставляя y, y', y'' в уравнение и сокращая обе части на e^{3x}, приходим к тождественному равенству

$$8ax + 2a + 4b = 8x + 10,$$

откуда

$$\begin{cases} 8a = 8, \\ 2a + 4b = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 1,\ b = 2$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y = x(x + 2)e^{3x}$. ▲

Третий случай: оба корня характеристического уравнения равны α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y = x^2 Q(x) e^{\alpha x}.$$

Пример 10. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}.$$

Решение

Здесь $\alpha = -1$ и оба корня характеристического уравнения также равны -1. Поэтому решение ищем в виде $y = ax^2 e^{\alpha x}$. Проведя такие же вычисления, что и в примерах 8 и 9, получим $a = 1{,}5$. Искомое решение имеет вид $y = 1{,}5x^2 e^{\alpha x}$. ▲

Упражнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{1}{1 + x^2} + x - \sin x.$$ ►

2. Найти частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' = \left(e^{2x} + \sin 3x\right)x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1. \ ►$$

3. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y'ctgx = 2x\sin x$. Найти также частное решение, если $y = 1, \quad y' = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$. ►

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''tgy = 2\left(y'\right)^2$. Найти также частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \dfrac{\pi}{4}, \quad y'(1) = -2$. ►

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\left(1 + yy'\right)y'' = \left(1 + \left(y'\right)^2\right)y',$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$. ►

6. Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения:

а) $x, \cos x$; б) $x, 2x$; в) $tgx, ctgx$. ►

7. Даны функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Составить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. ►

8. Найти общее решение уравнения $2y'' - 3y + y = 0$. ►

9. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y + y = 0$. ►

10. Найти общее решение уравнения $2y'' + y + 3y = 0$.►

11. Найти частное решение уравнения $3y'' + 7y + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{3}$. ►

12. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' = 5xe^x$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов. ►

13. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-2x}. \ ►$$

14. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$. ►

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид имеет общий вид дифференциального уравнения второго порядка?

2. Приведите вид дифференциального уравнения второго порядка разрешенный относительно $\boldsymbol{y''}$.

3. Приведите формулировку постановки задачи Коши для уравнения второго порядка разрешенной относительно производной. Что называется начальными условиями?

4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка разрешенной относительно производной второго порядка.

5. Какое дифференциальное уравнения второго порядка называется линейным?

6. Какие условия на коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения?

7. Какое линейное уравнение второго порядка называется однородным? Какое линейное уравнение второго порядка называется неоднородным?

8. Что называется линейной комбинацией функций

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)?$$

9. Когда заданные функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называется линейно независимыми, а когда линейно зависимыми?

10. Какими способами можно установить линейную независимость нескольких функций?

11. Что называется определителем Вронского из двух (из трех) функций?

12. Каким образом с помощью определителя Вронского можно установить линейную независимость нескольких функций? Сформулируйте теорему.

13. Множество решений линейного однородного уравнения второго порядка рядом свойств. Перечисляйте их.

14. Сформулируйте теорему о структуре множества всех решений однородного уравнения, занимающей центральное место в теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

15. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения второго порядка?

16. Используя определение фундаментальной системы решений, сформулируйте теорему о структуре множества всех решений однородного уравнения по-другому. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка?

17. Как можно получить общее решение неоднородного уравнения второго порядка? Сформулируйте теорему.

18. Как находят частное решение неоднородного уравнения второго порядка? Что называется вариацией произвольных постоянных?

19. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного уравнения 2 - го порядка с постоянными коэффициентами?

20. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет действительные корни ?

21. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни?

20. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет кратный корень?